

Общеинститутский семинар ИЗМИРАН по солнечно-земной физике,
посвященный памяти М.М. Молоденского

2 декабря 2013г.

Какова наиболее типичная геометрия трехмерного магнитного пересоединения?

Ю.В. Думин^{1,2} & Б.В. Сомов¹



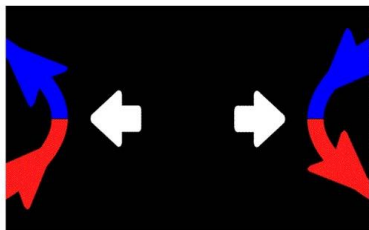
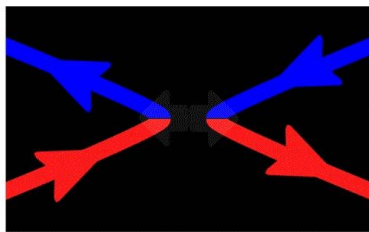
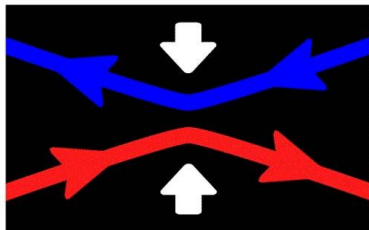
¹ Государственный астрономический
институт им. П.К. Штернберга,
Московский Государственный Университет
Москва, Университетский просп., 13

² Институт космических
исследований
Российской Академии Наук
Москва, Профсоюзная ул., 84/32



dumin@yahoo.com, somov@sai.msu.ru

Введение



Credits: Center for Visual computing, Univ. of California Riverside

Магнитное пересоединение – это процесс изменения топологии силовых линий магнитного поля.

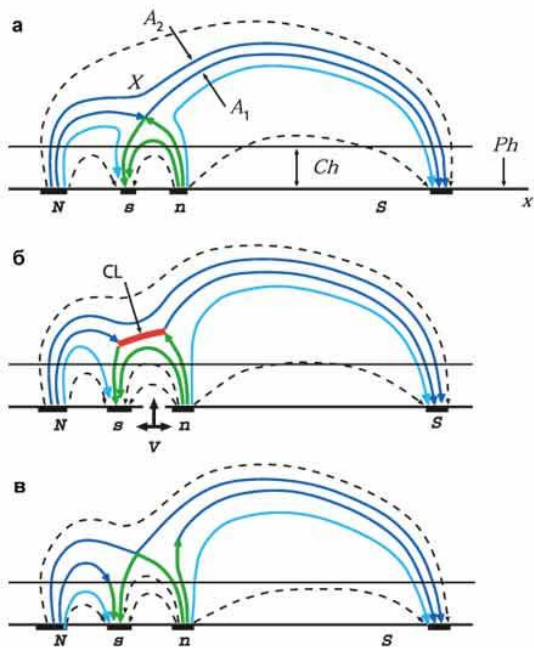
В результате пересоединения магнитное поле стремится перейти в состояние с меньшей энергией, при этом избыточная энергия выделяется в области пересоединения в виде нагрева плазмы, ускорения заряженных частиц и т.п.

Необходимой предпосылкой для возникновения магнитного пересоединения является наличие **нулевой точки** (в которой все компоненты магнитного поля исчезают), поскольку должна быть нарушена теорема о единственности магнитной силовой линии.

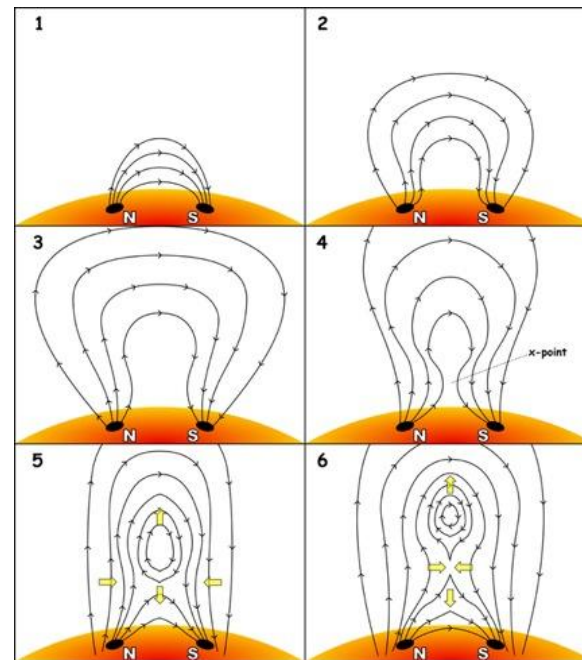
Магнитное пересоединение чаще всего изучается в двухмерном приближении.

Как будет показано далее, трехмерные структуры важны, главным образом, на достаточно малых масштабах; в то время как с увеличением масштаба они редуцируются к квази-двумерной геометрии (по крайней мере, в приближении потенциального поля).

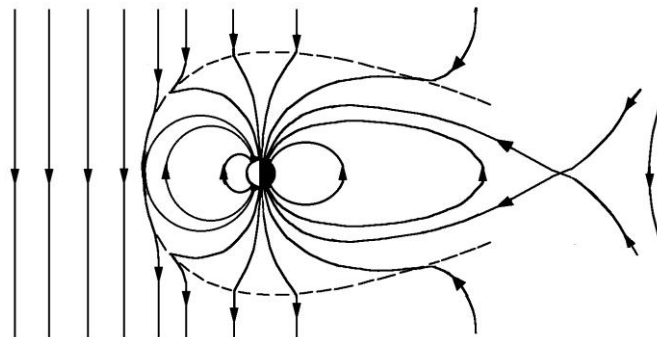
Примеры магнитного пересоединения



СОЛНЕЧНЫЕ ВСПЫШКИ

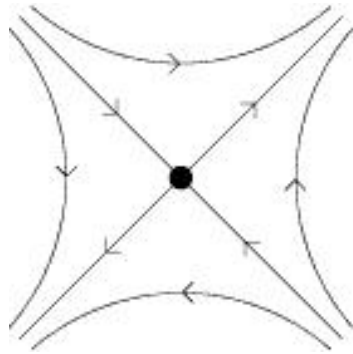


эруптивные явления



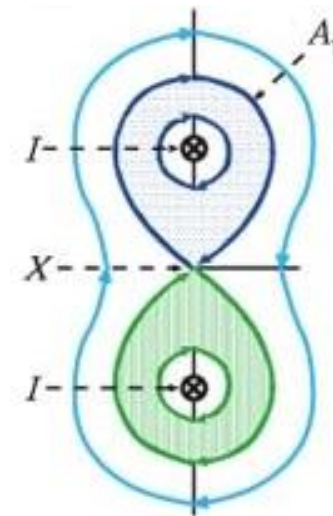
магнитные бури /
полярные сияния

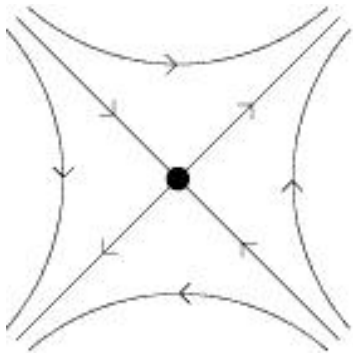
Важное свойство двумерного магнитного пересоединения



Единственным видом двумерной нулевой точки в приближении потенциального магнитного поля (т.е., в области без электрических токов) является структура **X-типа**.

Простейший пример – магнитная нулевая точка, создаваемая двумя параллельными токами с одинаковыми направлениями и амплитудой.





Единственным видом двумерной нулевой точки в приближении потенциального магнитного поля (т.е., в области без электрических токов) является структура **X-типа**.

Общее доказательство может быть проведено, например, методами теории комплексного потенциала:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} B_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ B_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \\ z &= x + iy \end{aligned}$$

$$\Phi = a_0 + a_1 z + \frac{1}{2} a_2 z^2 + \frac{1}{6} a_3 z^3 + \dots$$

$$\left. \frac{d\Phi}{dz} \right|_{z=0} = B_x(0, 0) - iB_y(0, 0) \equiv 0 \Rightarrow a_1 \equiv 0$$

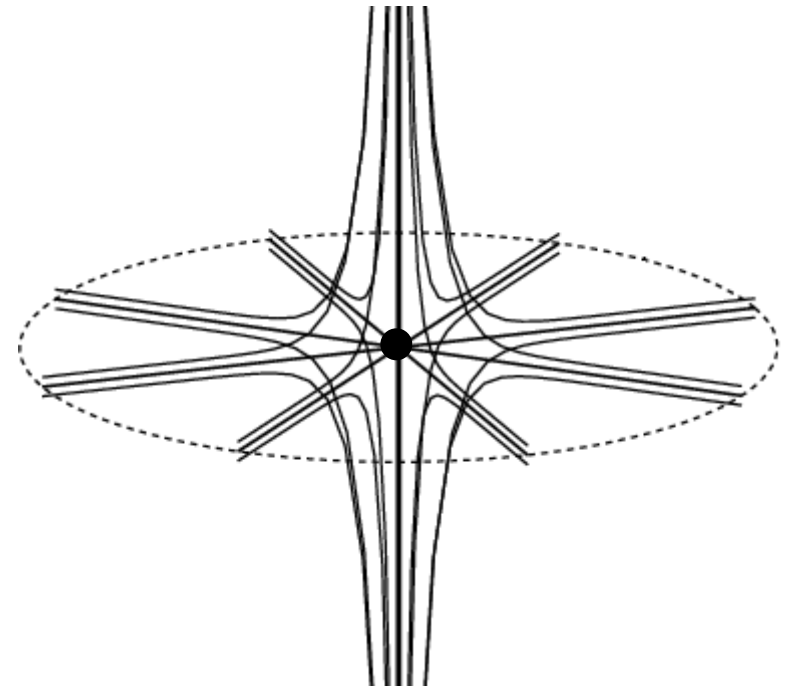
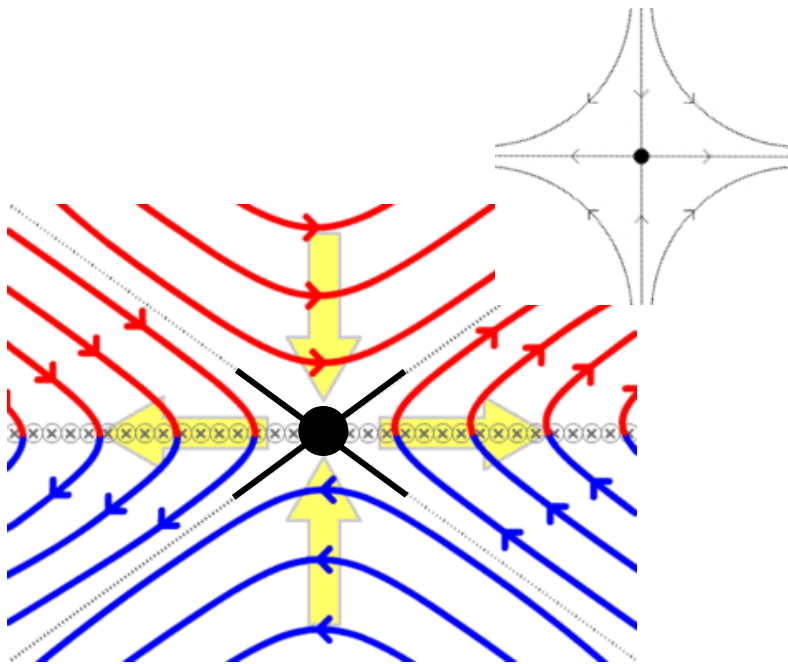
уравнение магнитных силовых линий:

$$\Phi = \frac{1}{2} a_2 z^2 + \dots = \frac{1}{2} a_2 [(x^2 - y^2) + 2i \circledast xy] + \dots$$

$$xy = \text{const}$$

$$y \propto \frac{\text{const}}{x}$$

Трехмерное магнитное пересоединение

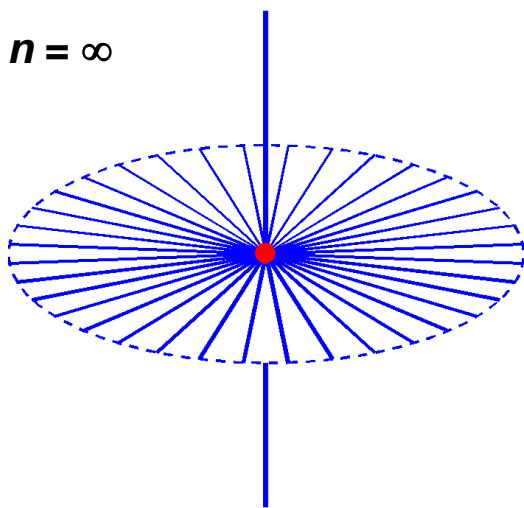


- В **двумерной** геометрии существует лишь один вид нулевых точек, ответственных за магнитное пересоединение; это – нулевые точки **X-типа**.

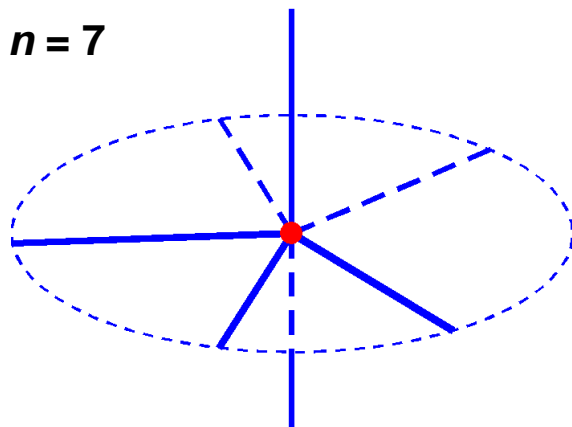
- В **трехмерной** геометрии возможны гораздо более разнообразные структуры, например, широко обсуждаемые нулевые точки **“пропеллерного”** типа.

- Какие еще типы трехмерных нулевых точек могут существовать?
- Как часто они реализуются в случайном магнитном поле?
(В частности, возможны ли нулевые точки с конечным числом асимптотических направлений?)

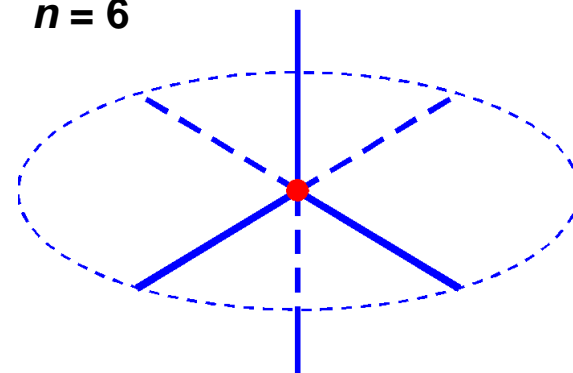
$n = \infty$



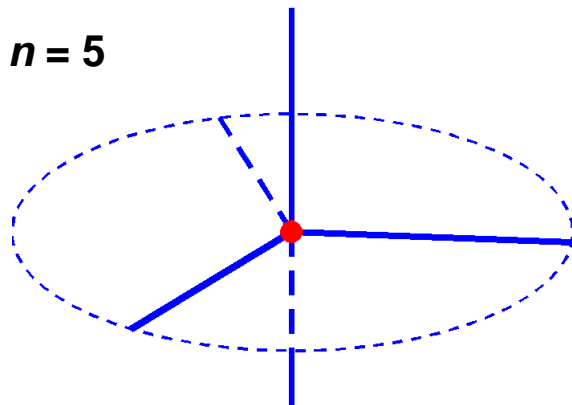
$n = 7$



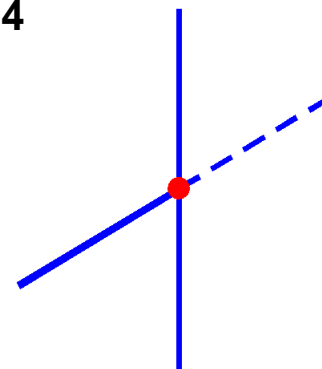
$n = 6$



$n = 5$

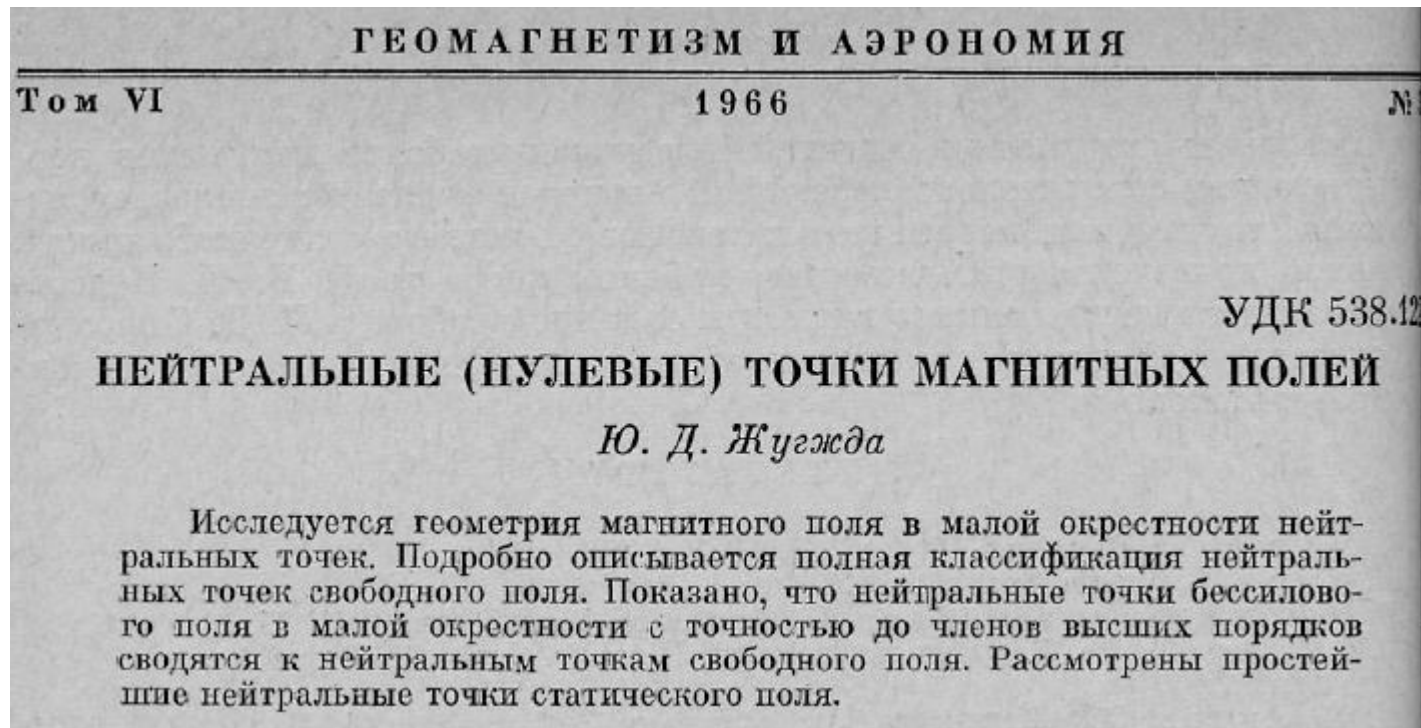


$n = 4$



- Какие еще типы трехмерных нулевых точек могут существовать?
- Как часто они реализуются в случайном магнитном поле?

На возможность существования более сложных типов нулевых точек указывалось еще в 1966г. в работе Ю.Д. Жугжды:



Однако вопрос о вероятности реализации различных типов нулевых точек не ставился. **Именно это и являлось основной целью настоящего исследования.**

Метод анализа

(приближение потенциального поля)

$$\mathbf{B} = -\text{grad } \psi$$

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^j r^j P_j^m(\cos \theta) [a_{jm} \cos(m\varphi) + b_{jm} \sin(m\varphi)]$$

- Если a_{jm} и b_{jm} – случайные величины, то эта формула задает некоторое случайное магнитное поле.
- Для простоты, ограничимся рассмотрением первых N членов этого разложения. Таким образом, случайное поле считается заданным в N -мерном пространстве параметров.
- Интенсивность магнитного поля выражается через потенциал формулами:

$$B_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad B_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$$

- Коэффициент a_{00} является, как всегда, произвольным.

- В 1-ом порядке по r имеет место:

$$B_r^{(1)} = -\left\{ a_{10} \cos \theta - (1 - \cos^2 \theta)^{1/2} [a_{11} \cos \varphi + b_{11} \sin \varphi] \right\}$$

Для того, чтобы при $r = 0$ возникла нулевая точка магнитного поля, необходимо, чтобы $a_{10} = a_{11} = b_{11} = 0$.

- Таким образом, любая нулевая точка может реализоваться на подмножестве параметров с размерностью не больше, чем $N - 3$.
- Во 2-ом порядке по r получаем:

$$B_r^{(2)} = -2r \left\{ \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) - \frac{3}{2} \sin(2\theta) [a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi] + \right. \\ \left. + 3 \sin^2 \theta [a_2 \cos(2\varphi) + b_2 \sin(2\varphi)] \right\}$$

$$B_\theta^{(2)} = -3r \left\{ \sin(2\theta) \left[-\frac{1}{2} + a_2 \cos(2\varphi) + b_2 \sin(2\varphi) \right] - \cos(2\theta) [a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi] \right\}$$

$$B_\varphi^{(2)} = -3r \left\{ 2 \sin \theta [-a_2 \sin(2\varphi) + b_2 \cos(2\varphi)] + \cos \theta [a_1 \sin \varphi - b_1 \cos \varphi] \right\}$$

Для краткости, введем следующие обозначения:

$$a_1 = a_{21}/a_{20}, \quad b_1 = b_{21}/a_{20}, \quad a_2 = a_{22}/a_{20}, \quad b_2 = b_{22}/a_{20}$$

- В общем случае, уравнение силовых линий магнитного поля имеет вид:

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta} = \frac{r \sin \theta d\varphi}{B_\varphi}$$

Оно также может быть переписано как система уравнений:

$$\begin{cases} r \frac{d\theta}{dr} = \frac{(B_\theta/r)}{(B_r/r)} \\ r \sin \theta \frac{d\varphi}{dr} = \frac{(B_\varphi/r)}{(B_r/r)} \end{cases}$$

- В частности, силовая линия, проходящая непосредственно через нулевую точку (т.е., начало координат), должна удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} (B_\theta^{(2)}/r) = 0 \\ (B_\varphi^{(2)}/r) = 0 \end{cases}$$

или, после подстановки сюда компонент магнитного поля,

$$\begin{cases} \sin(2\theta^*) \left[-\frac{1}{2} + a_2 \cos(2\varphi^*) + b_2 \sin(2\varphi^*) \right] - \cos(2\theta^*) \left[a_1 \cos \varphi^* + b_1 \sin \varphi^* \right] = 0 \\ 2 \sin \theta^* \left[-a_2 \sin(2\varphi^*) + b_2 \cos(2\varphi^*) \right] + \cos \theta^* \left[a_1 \sin \varphi^* - b_1 \cos \varphi^* \right] = 0 \end{cases}$$

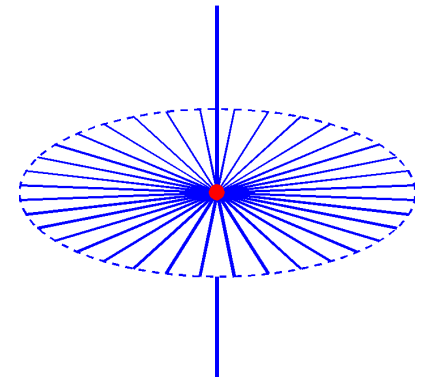
$$\begin{cases} \sin(2\theta^*) \left[-\frac{1}{2} + a_2 \cos(2\varphi^*) + b_2 \sin(2\varphi^*) \right] - \cos(2\theta^*) \left[a_1 \cos \varphi^* + b_1 \sin \varphi^* \right] = 0 \\ 2 \sin \theta^* \left[-a_2 \sin(2\varphi^*) + b_2 \cos(2\varphi^*) \right] + \cos \theta^* \left[a_1 \sin \varphi^* - b_1 \cos \varphi^* \right] = 0 \end{cases}$$

- Структура “пропеллерного” типа (с бесконечным числом “лопастей”) возникает, в частности, когда $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, т.к. вышеприведенная система уравнений сводится к условию:

$$\sin(2\theta^*) = 0,$$

которое имеет два решения:

$$\begin{cases} \theta^* = 0, \pi : \text{ось “пропеллера”}, \\ \theta^* = \pi/2, \varphi^* - \text{произвольно: лопасти “пропеллера”}. \end{cases}$$



- Кроме того, нужно иметь в виду, что эта геометрическая структура может быть повернута в пространстве на три угла Эйлера.
- Таким образом, “пропеллерная” структура реализуется на подмножестве коэффициентов сферических гармоник с размерностью

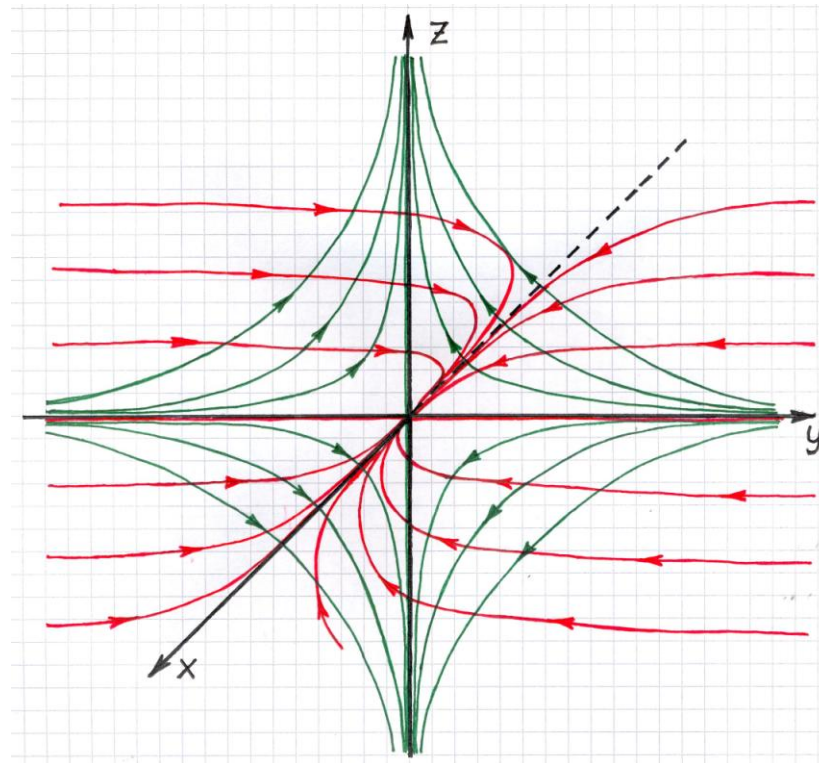
$$\begin{cases} \sin(2\theta^*) \left[-\frac{1}{2} + a_2 \cos(2\varphi^*) + b_2 \sin(2\varphi^*) \right] - \cos(2\theta^*) \left[a_1 \cos \varphi^* + b_1 \sin \varphi^* \right] = 0 \\ 2 \sin \theta^* \left[-a_2 \sin(2\varphi^*) + b_2 \cos(2\varphi^*) \right] + \cos \theta^* \left[a_1 \sin \varphi^* - b_1 \cos \varphi^* \right] = 0 \end{cases}$$

- Еще одно важное свойство вышеприведенной системы уравнений – это ее инвариантность при преобразовании:

$$\begin{cases} \theta^* \rightarrow \pi - \theta^* \\ \varphi^* \rightarrow \varphi^* + \pi \end{cases}$$

- Следовательно, магнитные силовые линии всегда входят в нулевую точку (или выходят из нее) как совокупности противоположно направленных пар.
- **В наиболее общем случае**, система двух уравнений с двумя неизвестными должна иметь конечное число решений, т.е. в реальном физическом пространстве через нулевую точку должно проходить дискретное количество магнитных силовых линий. Как вытекает из более тщательного анализа, это количество равно 6.
- Таким образом, наиболее общим (в вероятностном смысле) типом топологии трехмерной нулевой точки является “**шестихвостка**”. Она реализуется в подпространстве параметров с размерностью

Структура силовых линий магнитного поля в окрестности “шестихвостки”



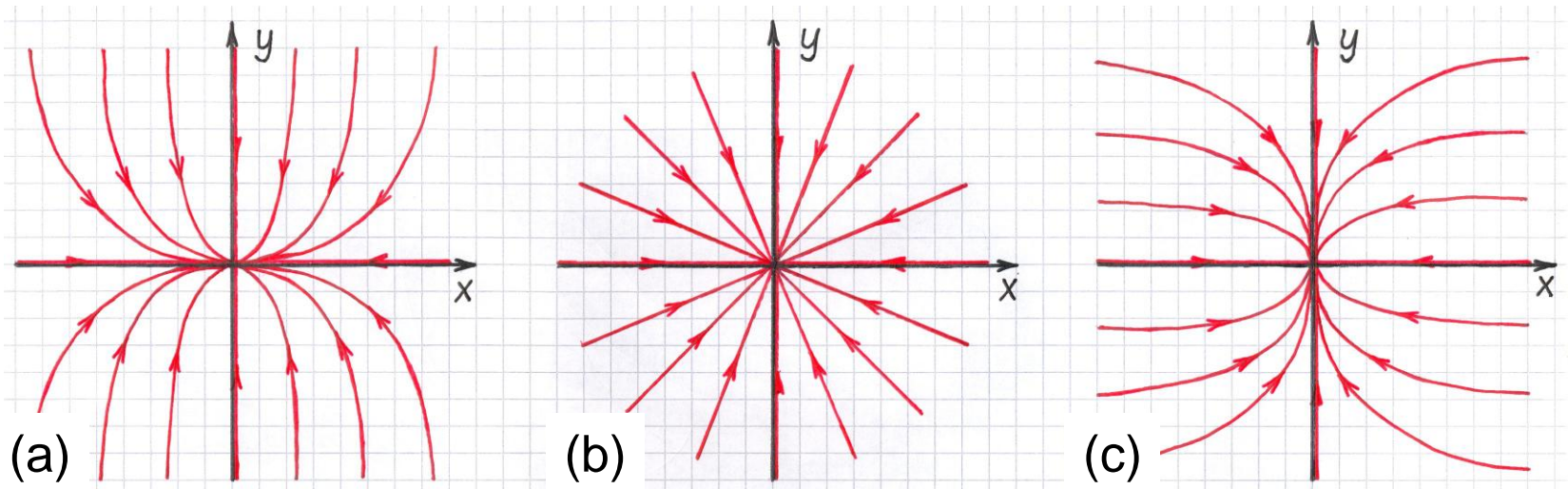
- **Красным цветом** изображены силовые линии магнитного поля в горизонтальной плоскости (xy); они имеют **структуру типа “узла”**.
- **Зеленым цветом** изображены силовые линии магнитного поля в вертикальной плоскости (yz); они имеют **структуру типа “седла”**.

Если пренебречь областью малых масштабов, то “шестихвостка” вырождается в совокупность квази-двумерных структур с хорошо известной топологией X-типа.

Наглядная иллюстрация,

почему вероятность возникновения “шестихвостки” оказывается гораздо больше, чем “пропеллерной” структуры

(конфигурация магнитных силовых линий в вертикальных плоскостях остается все время одного и того же седлового типа)



- Существует бесконечно много конфигураций типа (a) и (c), но лишь одна “промежуточная” конфигурация типа (b).

Основные выводы:

- Вероятность возникновения слишком сложных топологических конфигураций в окрестности нулевой точки, как и следовало ожидать, чрезвычайно мала.
- С другой стороны, наиболее простая и наглядная структура “пропеллерного” типа (которую чаще всего пытаются идентифицировать в наблюдательных данных), на самом деле, оказывается также сильно подавленной.
- Как показывает наш расчет, с подавляющей вероятностью должна возникать конфигурация, несколько более сложная, чем “пропеллерная”, а именно, структура типа “шестихвостки”.